

Bruce et Alice apprennent un jeu logique

Un jour Kara posa la question suivante à Bruce:

"Dans ton pays dans les écoles, apprend-on la logique?"

"La logique?" répondit Bruce, un peu surpris, "Je ne crois pas. Je croyais que le mot logique signifiait parler correctement. Oui, cela se fait chez nous, mais nous l'appelons grammaire.

"Ce n'est pas la même chose!", reprit Kara, "La grammaire règle seulement notre façon de parler mais la logique intervient dans nos pensées, la logique est l'étude du raisonnement, il s'agit d'apprendre comment tirer des conclusions." ajouta Kara

Okto, après avoir entendu cette discussion, essaya de clarifier le problème:

"En Ruritanie on apprend tout à travers des jeux.

Si nous leur montrons quelques jeux logiques, ils comprendront ce dont nous parlons."

"Cela serait amusant", dit Alice, "De combien de joueurs a-t-on besoin pour jouer un jeu logique?"

"Il en faudra huit pour les jeux simples", répondit Okto..

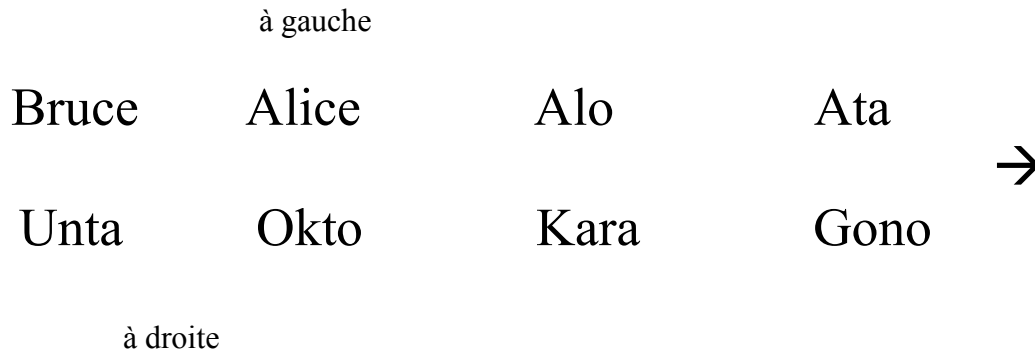
"Je l'aurais pu savoir!", répondit Alice, "C'est bien évident, car nous sommes dans la province des huit!"

"Cherchons les autres et commençons un jeu!", dit Gono avec force, "" Jouons un jeu logique pendant notre leçon de mathématique aujourd'hui. Je m'occupe de demander au professeur de mathématique s'il est d'accord."

Ainsi Gono partit tout de suite et rentra sous peu en disant que le professeur était d'accord pour montrer à Bruce et à Alice comment jouer à la logique durant la leçon d'aujourd'hui. Ensuite Okto décida d'affronter le problème en disant:

"Nous aurons besoin de deux rangées de quatre chaises. Chaque joueur aura une chaise qui sera sa place durant le jeu. On pourra faire semblant qu'il s'agit d'un petit autobus où il y a une partie en avant et une partie en arrière. Il y aura aussi une partie qui est le milieu de l'autobus et une autre qui consistera des deux extrémités. Egalement, il y aura une partie à droite et une partie à gauche. Ainsi chaque joueur aura trois noms, en avant ou en arrière, au milieu ou à une extrémité, à droite ou à gauche. Allez-y, cherchez vos places!"

Les enfants se mirent dans l'autobus tel qu'indiqué dans le diagramme ci-dessous



"Explique-nous les règles du jeu!", demanda Alice.

"On commence ou bien avec tout le monde assis, ou bien avec tout le monde debout. Durant le jeu, quand nous comptons les gens, nous comptons uniquement les joueurs qui sont debout. Il y a trois coups dans le jeu: AJOUTER, GARDER et ECHANGER. Dans le cas de chacun de ces coups, il faut préciser ce qu'il faut faire en combinant le nom du coup avec l'un ou l'autre des mots: DEVANT, ARRIERE, MILIEU, EXTREMITE, DROITE, GAUCHE

"Ceux précisés après le nom du coup, doivent se lever?", demanda Bruce. .

"Oui", répondit Okto, "si nous disons AJOUTE DEVANT: alors ceux qui sont en arrière restent comme ils sont, mais tous ceux qui se trouvent en avant se lèveront, ceux qui sont déjà debout, restent debout mais ceux qui sont assis devront se lever."

"Est-il vrai qu'avec GARDER DEVANT" interposa Alice "seulement les joueurs en avant seront debout? Tous ceux qui sont en avant se lèvent-ils?"

"Je vais te l'expliquer", répondit Okto, "parmi ceux qui sont en avant seulement ceux qui sont déjà debout resteront debout. On ne peut pas garder ceux qu'on n'a pas. Et naturellement, ceux en arrière qui sont debout devront s'asseoir"

"Supposons que nous voulons qu'Okto, Alo et Kara soient les seuls joueurs debout à la fin" interposa Ata, "alors avec un coup GARDER DEVANT Okto devra s'asseoir mais Alo et Kara resteront debout. Egalement Ata et Gono resteront assis car nous ne pouvons pas garder ceux-là car nous ne les avons pas. Est-ce que j'ai raison?"

"Tu as raison", lui répondit Okto "Maintenant je vais préciser le coup ECHANGER.. Par exemple ECHANGER MILIEU veut dire que tous ceux qui sont debout au milieu doivent s'asseoir, et tous ceux qui sont assis au milieu doivent se lever. Ceux qui sont aux extrémités restent comme ils sont, car ce coup n'est pas pour eux."

"Alors il ne faut pas échanger ceux au milieu avec ceux qui sont aux extrémités!", dit Unta, "Il faut échanger seulement ceux au milieu, les uns avec les autres. L'échange n'est pas entre le milieu et les extrémités, mais entre assis et debout!"

"Maintenant on joue le jeu de la manière suivante" reprit Okto, "Nous décidons qui doivent être les joueurs qui seront debout à la fin. Nous devons essayer d'atteindre cette situation dans un nombre minimum de coups. Les joueurs essayent, l'un après l'autre, de résoudre le problème, et celui qui le fait dans le nombre moindre de coups est le joueur qui gagne le jeu."

"Je propose que tous les garçons doivent être debout à la fin et toutes les filles assises, ainsi nous ne serons pas fatigués", proposa Unta.

Tous les joueurs se mirent d'accord pour affronter ce problème. Après un travail assez laborieux, ils trouvèrent une solution qui contenait trois coups. Voici leur solution, dans laquelle au début tout le monde était debout :

Bruce Alice Alo Ata	Bruce Alice Alo Ata
GARDER GAUCHE →	
Unta Okto Kara Gono	assis assis assis assis
ECHANGER DEVANT →	
	Bruce Alice assis assis assis assis Kara Gono
ECHANGER MILIEU →	
	Bruce assis Alo assis assis Okto assis Gono

"Maintenant toutes les filles debout!", proposa Bruce. "Mais au début tout le monde assis!"

Ils découvrirent bientôt que si le premier coup était AJOUTER DROITE, ils pouvaient continuer comme avant avec les coups ECHANGER DEVANT et ECHANGER MILIEU.

"Essayons de finir avec trois joueurs debout" proposa Ata, "Prenons Bruce, Alice et Okto, au début tout le monde debout?"

"De combien de coups aurons-nous besoin?"demanda Okto.

"Nous n'avons qu'à essayer!" dirent tous les joueurs presque à la fois. En effet ils essayèrent. Ils arrivèrent à obtenir les trois joueurs choisis debout après trois coups. Leur solution consistait des trois coups suivants:

GARDER GAUCHE, AJOUTER MILIEU, GARDER ARRIERE

et seulement Bruce, Alice et Okto étaient debout après le troisième coup.

"Maintenant ceux qui étaient restés debout doivent finir par être assis, et ceux qui étaient assis à la fin, devront maintenant finir par être debout." proposa Kara.

"Peut-être il y a un moyen de savoir comment résoudre ce problème en regardant la solution du problème "contraire" que nous venons de résoudre!" interposa Alice "Mais je ne sais pas comment!"

"Tu as raison" répondit Bruce, " Nous devons résoudre le problème et ensuite comparer les deux solutions!":

Les joueurs se mirent d'accord avec ce qu'Alice avait proposé. Ils décidèrent aussi de commencer avec tout le monde assis,, car il s'agissait d'affronter le problème "contraire". Finalement ils réussirent à trouver la solution suivante:

AJOUTER DROITE GARDER EXTREMITE AJOUTER DEVANT

C'était la route plus rapide pour finir avec Unta, Alo, Ata, Kara et Gono debout.

"Je crois que je vois quelque chose!", dit Alo, "Pour passer d'une solution à l'autre il faut échanger GARDER et AJOUTER. Il faut aussi échanger DROITE et GAUCHE, DEVANT et ARRIERE, MILIEU et EXTREMITE. Voilà le moyen secret de trouver la solution du "contraire" d'un problème!"

"Peut-être tu n'as pas encore découvert tout!",dit Okto, ""Regarde notre premier problème et son contraire.. Pour que les garçons soient debout à la fin, nous avons proposé les coups

GARDER GAUCHE ECHANGER DEVANT ECHANGER MILIEU

Quand nous voulions que les filles restent debout à la fin, les coups étaient

AJOUTER DROITE ECHANGER DEVANT ECHANGER MILIEU

où seulement le premier coup doit être changé."

"Oui, mais c'est seulement le premier coup qui est un GARDER ou un AJOUTER " dit Bruce "Il est possible qu'avec ECHANGER rien ne change, d'autre part, dans le cas de

GARDER et AJOUTER, il faut les échanger, comme aussi la partie de l'autobus à laquelle chaque coup est relié."

"IL SE PEUT QUE TU AIES RAISON", dit Okto, " Nous devrions regarder un autre exemple pour voir si ce que tu dis est vrai. Essayons le problème dans lequel Alice et Kara restent debout à la fin."

Les enfants décidèrent d'affronter ce problème et son contraire dans lequel Alice et Kara seraient les seules à finir assises. Après beaucoup de travail ils finirent joyeusement, ayant trouvé les solutions suivantes

:

TOUS DEBOUT GARDER DROITE ECHANGER ARRIERE GARDER MILIEU

TOUS ASSIS AJOUTER GAUCHE ECHANGER ARRIERE AJOUTER EXTREMITE

"Ta supposition semble fonctionner" dit Okto à Bruce, mais peut-être nous devrions voir d'autres exemples. Il est possible que nous ayons examiné des cas spéciaux!"

"Que dites-vous du problème de Bruce, Alice et Kara?", demanda Unta.

Ils trouvèrent une solution qui exigeait quatre coups, et malgré avoir cherché pendant une période assez longue, ils ne réussirent pas à trouver une solution avec moins de quatre coups. Tout d'un coup, Bruce eut une idée.

"Nous pourrions d'abord déterminer le dernier coup, ensuite l'avant dernier et ainsi de suite. Voyons! Le dernier coup ne peut pas être AJOUTER car dans un tel cas tous les joueurs d'une moitié de l'autobus devraient être debout à la fin, et n'avons que trois joueurs debout à la fin.. Le dernier coup n'est pas GARDER non plus, car dans un tel cas tous les joueurs devraient appartenir à la même moitié de l'autobus, et ce n'est pas le cas. On déduit que le dernier coup est ECHANGER"

"Tu raisonnes bien!" dit Okto, "mais quelle moitié a-t-on échangé?"

"Peut-être la moitié qui est en arrière a été échangée car dans ce cas, avant l'échange, tous les enfants debout se seraient trouvés dans la moitié droite et cela signifie que le coup avant celui-là aurait été GARDER DROITE Par conséquent peut-être les enfants du côté gauche auraient été debout avant le coup que je suppose maintenant soit l'avant dernier."!"

"Je comprends !", dit Alice, " Et nous pouvons obtenir ces six enfants en faisant le coup GARDER ARRIERE, suivi de AJOUTER MILIEU ou bien GARDER MILIEU suivi de AJOUTER ARRIERE. Il me paraît que les coups doivent être

:

TOUS DEBOUT GARDER ARRIERE AJOUTER MILIEU GARDER DROITE
ECHANGER ARRIERE

Pour obtenir les autres cinq enfants debout à la fin, nous devrions alors faire les coups:

TOUS ASSIS AJOUTER DEVANT GARDER EXTREMITES AJOUTER GAUCHE

ECHANGER ARRIERE

Nous devons vérifier les deux solutions proposées pour voir si nous avons raison.?"

En effet ils vérifièrent les deux solutions, en travaillant lentement et soigneusement pour ne pas faire des erreurs. Heureusement tout était correcte! Alice posa cette question à Okto, avec un sourire:

"J'ai l'idée que tu as une autre version de ce jeu dans ta tête!".

"Tu as raison", répondit Okto "On peut jouer avec des mots ou avec des nombres. Comment voulez-vous jouer?"

"Jouons d'abord avec les nombres", proposa Bruce.

"Êtes-vous sûrs que vous pourrez faire les calculs en base huit?" demanda Okto

"Certainement! " reprit Bruce et Alice en même temps. Nous n'avons qu'à imaginer que nous n'avons que quatre doigts ainsi huit doigts signifieraient une personne, neuf doigts une personne et un doigt!"

"Alors ça va marcher", répondit Okto. "Le jeu se joue avec les facteurs de 3-6. ou bien trente selon la façon de parler de Bruce et Alice. Alice, dis-moi quels sont les facteurs to 3-6 ? "

"Voyons", dit Alice tout en réfléchissant "Les voici:

1, 2, 3, 5, 6, 1-2, 1-7, 3-6

exprimés dans votre système de numérotage. "

"Quatre parmi eux sont impairs, quatre sont pairs. Vous les reconnaîtrez facilement car nos règles sont les mêmes que vous utilisez en base dix.. Quatre des facteurs sont des multiples de trois et quatre ne le sont pas. Les nombres 3, 6, 1-7 et 3-6 sont des multiples de 3 mais les nombres 1, 2, 5, 1-2 ne le sont pas. Quatre de nos facteurs sont des multiples de 5, et quatre ne le sont pas. Les nombres 5, 1-2, 1-7, 3-6 sont des multiples de 5 mais les nombres 1, 2, 3, 6 ne le sont pas. Les nombres avec deux chiffres sont des multiples de 5, comme aussi le nombre 5. Je dis ça pour vous donner un aide-mémoire."

"Comment jouons-nous avec ces nombres?", demanda Alice.

"Nous écrivons chaque nombre sur un morceau de papier, et nous devons procurer une boîte dans laquelle nous pourrions les poser ou bien de laquelle nous pourrions les enlever. Quand tous les nombres sont dans la boîte, ça sera la même chose que tout le monde debout dans

l'autobus. Quand la boîte est vide, ça veut dire que tout le monde est assis dans le jeu de l'autobus. On se sert des mêmes coups. AJOUTER veut dire mettre quelque chose dans la boîte, GARDER veut dire garder quelque chose dans la boîte, et ECHANGER veut dire échanger une certaine sorte de nombre entre ceux qui sont dans la boîte et ceux qui ne le sont pas. "

"Je comprends", dit Alo, "Gardons les nombres 1, 2 et 3 dans la boîte, les autres devant rester dehors!"

"Tous les trois sont une même sorte de nombre", remarqua Bruce .

"Ils me paraissent bien différents!", dit Ata

"Ils sont tous des non-multiples de cinq!", dit Bruce, "Vois-tu que parmi eux il n'y a aucun nombre qui soit un multiple de cinq?"

"Et ceux dont avons besoin sont impairs ou des non-multiples de trois!" ajouta Alice avec force.

"Dans ce cas, en commençant avec tous les nombres dans la boîte, il faudrait faire les coups

GARDER IMPAIR AJOUTER NON-3 GARDER NON-5

Le jeu alors se fera de la façon suivante::

[1, 2, 3, 5, 6, 12, 17, 36] GARDER IMPAIR [1, 3, 5, 17]

AJOUTER NON-3 [1, 2, 3, 5, 12, 17] et alors

GARDER NON-5 nous donne [1, 2, 3]. Trois coups, c'est bien ça, eh?"

"Maintenant essayons de mettre l'ensemble [5, 6, 12, 17, 36] dans la boîte !", proposa Bruce.

"Le même artifice que nous avons employé dans le cas de l'autobus, va-t-il fonctionner?" demanda Kara.

"Essayons!", dit Alice. "Commençons avec la boîte vide et échangeons les coups GARDER et AJOUTER comme aussi la sorte de nombre à laquelle chaque coup est appliqué!"

Le résultat fut la façon suivante de jouer:

[] AJOUTER PAIR [2, 6, 12, 36] GARDER 3 [6, 36] AJOUTER 5 [5, 6, 10, 17, 36]

"Connais-tu un problème où il faut se servir du coup ECHANGER?", demanda Unta .

"Je pense que oui", répondit Okto, "Essayons l'ensemble {1, 6, 1-7}"

"Ces nombres ne sont pas tous de la même sorte" interposa Bruce, "C'est comme ça que tu le sais, n'est-ce pas?"

"Oui, naturellement!", répondit Okto, "Mais il y a une petite surprise dans la solution' allez affronter le problème de finir avec seulement ces trois nombres dans la boîte."

Ils travaillèrent assez longtemps avant d'obtenir une solution. Ils savaient bien que le dernier coup devait être un ECHANGER, après beaucoup de discussion ils décidèrent que l'avant dernier ne pouvait être ni un GARDER ni un AJOUTER, alors la solution devait avoir deux coups ECHANGER à la fin. Sans doute c' était la surprise dont Okto avait parlé!"
Voici la solution trouvée par les enfants:

[All] GARDER NON-5 [1, 2, 3, 6] AJOUTER 3 [1, 2, 3, 6, 17, 36] GARDER even [2, 6, 36]

ensuite ECHANGER 3 [2, 3, 17] ECHANGER NON-5 [1, 6, 17]

Pour mettre l'ensemble [2, 3, 5, 10, 36] dans la boîte, en commençant avec la boîte vide, ils trouvèrent la solution suivante:

[rien] AJOUTER 5 [5, 12, 17, 36] GARDER NON-3 [5, 12]

AJOUTER IMPAIR [1, 3, 5, 12, 17]

then ECHANGER 3 [1, 5, 6, 12, 36] then ECHANGER NON-5 [2, 3, 5, 12, 36]

"L'artifice fonctionne" dit Bruce, "L'as-tu inventé, Okto?" , demanda Bruce en s'adressant à Okto.

"Je regrette que je n'aie pas cette honneur!" répondit Okto, "C'était une personne qui s'appelait De Morgan qui fut le premier à découvrir cette règle, il y a très longtemps. Je ne sais pas s'il avait joué un jeu comme celui que nous venons de jouer!"

"Comment peut-on jouer avec des mots?", demanda Gono "Le peut-on jouer avec des mots quelconques?"

"Il est mieux de le jouer avec des ensembles de mots ou de phrases qui se divisent facilement en deux parties de trois manières différentes. Par exemple avec les phrases:

[je viens, il vient, nous venons, ils viennent, je viendrai, il viendra, nous viendrons, ils viendront]

Alors il y a trois moyens de diviser les huit phrases en deux ensembles de quatre phrases

première et troisième personne, singulier et pluriel, présent et futur

“Je comprends”, dit Bruce, “On pourra GARDER PRESENT, ECHANGER SINGULIER, ou bien AJOUTER TROISIEME PERSONNE et ainsi de suite. En effet ça serait le même jeu. Nous n’aurons qu’à décider quelles doivent être les phrases dans la boîte à la fin d’un jeu!”

“Ce que voudrais savoir c’est de reconnaître quels sont les problèmes les plus difficiles. Je suppose qu’un problème dont la solution exige beaucoup de coups est plus difficile qu’un problème qui exige moins de coups pour le résoudre.” demanda Alice.

"Le problème [1, 2, 3] est l’un des plus difficiles parmi ceux qui admettent une solution. Il n’y a pas de solutions avec moins de cinq coups.” dit Okto "

“Veux-tu dire qu’il y a des problèmes qu’on ne peut pas résoudre?”, demanda Kara.

“Si tu veux finir avec deux éléments dans la boîte différents l’un de l’autre de toutes les trois manières possibles, cela ne se fera jamais avec nos règles du jeu”, répondit Okto.

“Naturellement, avec les autres six éléments dans la boîte, tu ne réussiras non plus!”
“est-ce que c’est le seul cas impossible?” demanda Kara

“Non, il y a un autre moyen de poser un problème impossible”, répondit Okto, “Si tu veux finir avec quatre éléments tels que parmi eux il existe un qui soit différent de chacun des autres d’une seule manière, tu ne réussiras jamais!”

"Je peux te donner un exemple!", dit Bruce, "L'ensemble {1, 2, 3, 5} présenterait un cas impossible, car 1 est différent de 2, 2 étant pair et 1 impair, entre 1 et 3 il y a la différence de multiplicité de 3, et entre 1 et 5 il y a la différence de multiplicité de 5. On ne pourrait jamais finir avec seulement les petits nombres 1, 2, 3 et 5 dans la boîte!"

"Les quatre nombres [6, 12, 17, 36] fourniraient-ils également un problème impossible?" demanda Alice.

"On peut voir si oui ou non" interposa Bruce "en cherchant un nombre parmi les quatre qui soit différent de chacun des autres d’une seule manière!"

"Oui, naturellement, il faut qu’il y ait un tel nombre”, dit Kara tout en réfléchissant, “Mais quel est le nombre qu’il nous faut?”

"Je crois que je sais duquel des quatre nous avons besoin!",dit Alice, "Ça doit être le nombre 3-6. Entre 3-6 et 1-7 il y a la différence pair-impair. tous les deux sont des multiples de 3 comme aussi de 5. Comme ça nous avons une seule différence. Entre 3-6 et 1-2 il y a la différence de multiplicité de 3, mais tous les deux sont pairs et tous les deux sont des multiples de 5.

"Et le nombre 6", ajouta Gono, " n'est pas un multiple de 5 au contraire 3-6 est un multiple de 5. Tous les deux sont pairs et tous les deux sont des multiples de 3. Ça fait de nouveau une seule différence!"

"Alors [6, 12, 17, 36] est aussi un ensemble impossible selon nos règles!" dit Alo.

"Comment tout ça est-il relié à la logique?, demanda Alice.

"Regardons un ensemble de mots anglais comme l'ensemble suivant:

[ban, bat, bin, bit, fan, fat, fin, fit]

et essayons de trouver le plus grand ensemble où chaque mot avec T est aussi un mot avec A" proposa Okto "Peux-tu me dire quels sont les mots qu'il nous faut pour construire cet ensemble?" dit-il en s'adressant à Alice.

"Que dis-tu de [bat, fat] ?", dit Alice sans beaucoup de conviction.

"Bien sûr ces deux mots doivent appartenir à l'ensemble que nous cherchons, mais tous les mots avec N devraient aussi faire partie de l'ensemble. Notre ensemble, le plus grand possible, serait:

[ban, bat, bin, fan, fat, fin]

car il reste vrai que tous les mots avec T ont aussi la lettre A, pour cette raison nous devons avoir aussi ces mots, ceux avec A comme aussi ceux avec I" expliqua Koto.

Kara voulait faire partie de l'explication, ainsi elle intervint en disant:

"Si on veut finir exactement avec les mots ban bat bin fan fat fin dans la boîte, de quels coups aura-t-on besoin?"

"C'est facile" dit Bruce. "GARDER A, AJOUTER N, Ainsi tous les mots A y seront et parmi les mots I nous aurons seulement ceux avec N

"Alors si nous prenions un mot T de la boîte, il serait certainement un mot A" prononça Kara sa conclusion logique"

"Vois-tu maintenant qu'il y a de la logique dans tout ça, n'est-ce pas, Okto?" ajouta-t-elle..

"C'est vrai", répondit Okto

"Il est aussi vrai", dit Bruce, "que si on prend un mot I, il sera toujours un mot N"

"Tu as trouvé une loi intéressante", dit Okto, "Pense à deux situations différentes. Appelons-les X et Y mais assure-toi que chaque fois que X a lieu, la situation Y aura lieu aussi, alors on peut conclure que si Y n'a pas lieu, X n'aura pas lieu, non plus! "

"C'est vrai"dit Kara, "Nous avons appris cette loi il y a quelques jours. le professeur l'a appelée CONTRAPOSITION. Est-ce juste?"

"C'est bien juste", dit Okto.

"Supposons que X signifie "ETRE PARESSEUX" et que Y signifie PRISON" proposa Alice " dans ce cas, de toute façon en Ruritanie, si X a lieu, il faut aller en prison, ainsi Y a lieu comme conséquence de X. NON Y veut dire qu'on ne va pas en prison, dans ce cas NON X aura lieu, c'est à dire, on n'est pas paresseux. Maintenant je vois comment ça fonctionne!" dit Alice en souriant.

Il y a une autre chose que nous pouvons dire de notre ensemble" dit Okto, Dans l'ensemble [ban, bat, bin, fan, fat, fin] chaque mot est ou un mot A ou un mot N"

"Ou bien tous les deux!" interposa Kara.

"Mettons-nous d'accord que chaque fois nous parlons de ceci ou cela, il est entendu que le ceci et aussi le cela peuvent avoir lieu en même temps. On appelle ça le ou ceci ou cela inclusif. " dit Okto

"Alors quand nous appliquons le coup AJOUTER, nous formons un ensemble ou ceci ou cela." ajouta Kara, "Quelle sorte d'ensemble formons-nous en appliquant le coup GARDER?"

"On obtiendrait l'ensemble [bat, ban] si nous disions GARDER A et ensuite GARDER B. Dans cet ensemble tous les mots sont en même temps des mots A et des mots B. Ainsi au lieu d'obtenir un ensemble ou ceci ou cela, on obtient un ensemble en même temps ceci et cela. Le reste des mots [bin, bit, fan, fat, fin, fit }, nous donnent un ensemble ou ceci ou cela. Chaque mot dans cet ensemble est ou un mot I ou un mot F. Les mots I sont les mots NON A et les mots F sont les mots NON B", expliqua Okto.

"C'est comme l'artifice pour résoudre un problème contraire!" ajouta Alice avec enthousiasme. " Ce vieux bonhomme De Morgan aurait dû y penser en regardant un ensemble ou ceci ou cela et l'ensemble correspondant qui est un en même temps ceci et cela"

"Il est probable que tu aies raison!" répondit Okto " Si nous appelons les mots I les mots NON A, et les mots F les mots NON B, nous voyons mieux ce qui se passe. Nous pouvons dire que

NON (en même temps A et B) revient à dire ou NON A ou NON B
c'est la loi de De Morgan, ce que nous devons dire pour reconnaître qu'il était le premier
~à découvrir ce lien"

"Je n'aurais pas cru qu'en commençant avec des jeux on pourrait apprendre à raisonner de cette façon!", s'écria Alice.